$$=\alpha f(\alpha) - \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+1} + \frac{1}{2} - \int_0^\alpha \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})\,dx$$
$$=\alpha^2 - \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}[e^x + e^{-x}]_0^\alpha \quad \text{car } f(\alpha) = \alpha$$
$$=\alpha^2 - \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^\alpha + e^{-\alpha}) + \frac{1}{2}$$
$$=\alpha^2 - \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+1} - \frac{1}{4}(e^\alpha + e^{-\alpha}) + 1$$

C-1/a- $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

On a φ est dérivable sur IR et $\forall x \in IR$;

$$\varphi'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

$\Rightarrow$ φ est strictement croissante sur IR

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de IR sur $J=\varphi(IR)$

• $J = \varphi(IR) =]\lim\limits_{-\infty} \varphi; \lim\limits_{+\infty} \varphi[$ car φ est continue et $\nearrow$ sur IR.

$$* \lim_{-\infty} \varphi = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1$$

$$* \lim_{+\infty} \varphi = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1-e^{-2x})} = 1$$

Ainsi $J =]-1; 1[$.

b- Soit $x \in J$; $h(x)=y \Leftrightarrow \varphi(y)=x \Leftrightarrow \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \Leftrightarrow \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$

$$\Leftrightarrow e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \Leftrightarrow (1-x)e^{2y} = 1 + x$$
$$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+x}{1-x}.$$

Conclusion : $\forall x \in J; h(x) = \dfrac{1}{2}\text{Log}\dfrac{1+x}{1-x}$.

$$\star\ \forall x \in J; h'(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

2/ On pose ,pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in IN^*$

a- La fonction S_n est dérivable sur $[0,1[$ (car c'est un polynome)

$$* \text{ et } \forall x \in [0,1[; S_n'(x) = 1 + \frac{3x^2}{3} + \frac{5x^4}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)x^{2n-2}}{2n-1}.$$
$$= 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}$$
$$= 1 + x^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^2)^{n-1}$$

Comme $\forall x \in [0,1[; x^2 \neq 1$ alors $1+x^2+(x^2)^2+\ldots+(x^2)^{n-1} = \dfrac{1-(x^2)^n}{1-x^2}$

D'où $\forall x \in [0,1[; S_n'(x) = \dfrac{1-(x^2)^n}{1-x^2}$ de plus $S_n(0) = 0$

Ainsi la fonction S_n est la primitive de $x \mapsto \frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}$ sur $[0,1[$